

Lista wstępna: Rachunek wektorowy

- Zadanie 1. Dane są wektory w kartezjańskim układzie współrzędnych: $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j}$, $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j}$ i $\vec{c} = \hat{i}$. (a) oblicz długości wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$; (b) wyznacz wektor $\vec{w} = \vec{a} + \vec{b}$; (c) oblicz iloczyn skalarny pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{c}$; (d) oblicz kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{c}$; (e) wyznacz wektor $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$; (f) wyznacz iloczyn wektorowy pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
- Zadanie 2. Dane są dwa wektory w kartezjańskim układzie współrzędnych: $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{c} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$. Oblicz: (a) $\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})$, (b) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$.
- Zadanie 3. Dany jest sześcian o boku długości równej 1. Jeden z wierzchołków znajduje się w punkcie $A(0, 0, 0)$, a przeciwległy wierzchołek - w punkcie $B(1, 1, 1)$. Znajdź składowe wektorów odpowiadających przekątnej sześcianu i przekątnej ściany bocznej, a następnie oblicz kąt pomiędzy tymi wektorami.
- Zadanie 4. Dane są wektory $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$ oraz $\vec{b} = [b_x, b_y, b_z]$. Pokazać, że zachodzą równości: (a) $(\vec{a} + \vec{b}) \circ (\vec{a} - \vec{b}) = a^2 - b^2$; (b) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
- Zadanie 5. Wykaż, że dla każdego wektora $\vec{a}$ prawdą jest, że: (a) $\vec{a} \circ \vec{a} = a^2$, (b) $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.
- Zadanie 6. Dane są wektory w kartezjańskim układzie współrzędnych: $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j}$. Wyznacz rzut wektora $\vec{b}$ na kierunek wektora $\vec{a}$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

- Z.1 Dane są wektory w kartezjańskim układzie współrzędnych: $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j}$. Oblicz: (a) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, (b) $\vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$, (c) długość wektora $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b}$, (d) iloczyn skalarny wektorów $\vec{c}$ i $\vec{d}$, (e) kąt zawarty pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$, (f) długość rzutu wektora $\vec{a}$ na płaszczyznę XOY , (g) iloczyn wektorowy wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.
- Z.2 Dane są wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ o długościach, odpowiednio, 2 i 6 (jednostek). Kąt pomiędzy kierunkami obu tych wektorów wynosi 60° . Wyznacz rzut wektora $\vec{a}$ na wektor $\vec{b}$.
- Z.3 W kartezjańskim układzie współrzędnych, wektor $\vec{a} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$ należy rozłożyć na dwa wektory składowe z których jeden jest równoległy a drugi prostopadły do danego wektora $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j}$.
- Z.4 Dany jest sześcian o krawędzi równej $a = 1$. Wyznacz kąt utworzony przez każdą parę przekątnych sześcianu.
- Z.5 Dane są dwa wektory w kartezjańskim układzie współrzędnych $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j}$ i $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j}$. Oblicz: (a) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, (b) długość wektora $\vec{c}$, (c) kąt pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$, (d) kąt pomiędzy wektorami $\vec{c}$ i $\vec{d} = \hat{i} - \hat{k}$.
- Z.6 Udowodnij, że wektor $\vec{a} = -2\hat{i} + 4\hat{j} - 1\hat{k}$ jest prostopadły do wektora $\vec{b} = -3\hat{i} - 4\hat{j} - 10\hat{k}$.
- Z.7 Wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ mają długości równe 3. Oblicz kąt pomiędzy tymi wektorami, jeśli $\vec{a} + \vec{b} = 3\sqrt{2} \hat{i}$.
- Z.8 Uzasadnij, że $\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}$.
- Z.9 W pewnym układzie współrzędnych kartezjańskich na płaszczyźnie dane są wektory $\vec{a} = \hat{i}$ i $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j}$. Obracamy układ współrzędnych o 45° w kierunku dodatnim (czyli przeciwnie do ruchu wskazówek zegara), definiując w ten sposób nowe (obrócone) wersory $\hat{i}'$ i $\hat{j}'$. (a) Wyraż wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ poprzez nowe wektory jednostkowe? (b) Czy po tej operacji zmieni się iloczyn skalarny tych wektorów? Uzasadnij. (c) Udowodnij, że $\vec{a} + \vec{b}$ ma zawsze taką samą wartość i kierunek, niezależnie od tego, w którym układzie wykonujemy dodawanie.